Mathematik Nachhilfe Blog

Mathe so einfach wie möglich erklärt

Terme

— Unbekannte Anzahl an Gummibärchen © günther gumhold PIXELIO www.pixelio.de

1. Funktion und Form eines Terms

Um alltägliche Phänomene oder etwas kompliziertere Gegebenheiten in der Sprache der Mathematik wiederzugeben, reichen hierfür oftmals die normalen Grundrechenarten inklusive Dezimal- und Bruchrechnen alleine nicht mehr aus. Ist nämlich bei einem alltäglichen Phänomen oder einer etwas schwierigeren Gegebenheit ein bestimmter Aspekt nicht zahlenmäßig genau erfassbar, dann ist dieser logischerweise unbekannt beziehungsweise – in der Sprache der Mathematik gesprochen – variabel. Da nun hier die bekannten einfachen Rechenoperationen an ihre Grenzen stoßen, müssen diese „phänomenbezogen" oder „gegebenheitsbezogen" sinnvoll erweitert werden. Dies macht man in Mathe durch einen sogenannten Term. Denn ein Term ist in der Regel nichts anderes als ein komplexeres Mathematik-Gebilde, das auf den Grundrechenarten inklusive Dezimal- und Bruchrechnen „fußt". Deshalb kommen auch alle Grundrechenarten („+", „–", „·" und „:") sowie Dezimal- und Bruchrechnungen bei einem Term weiter vor – aber normalerweise nicht nur. Schließlich muss ja auch ein Term gerade den Aspekt wiedergeben, der bei einem alltäglichen Phänomen oder einer etwas komplizierteren Gegebenheit „unbekannt" ist beziehungsweise „variabel". Daher besteht ein Term normalerweise auch aus mindestens einer Variablen. Das war's aber fast schon an Neuem.

— Die Variable x © Claudia Hautumm PIXELIO www.pixelio.de

Angemerkt muss nur noch werden, dass bei einem Term neben einer oder mehreren Variablen, den Grundrechenzeichen natürlich auch Zahlen und ebenso Klammern auftreten können, ebenso Hochzahlen (Potenzen), Dezimalzahlen und Brüche – was jedoch nichts Neues ist. Vor allem Zahlen, aber ebenfalls Klammern sind ja auch bekanntermaßen ein fester Bestandteil bei allen Grundrechenarten. Das Gleiche gilt für Hochzahlen (Potenzen), da diese nur eine andere Schreibweise innerhalb einer bestimmten Multiplikation darstellen. Darüber hinaus sind Dezimalzahlen und Brüche ebenso nichts Neues, da diese ebenso sich aus den Grundrechenarten mittels bestimmter Rechenoperationen ergeben. Des Weiteren können aber bei einem Term auch Zahlen und Rechenzeichen vorkommen, die einem eventuell noch nicht so geläufig sind, wie beispielsweise negative Zahlen, Betragsstriche und Wurzeln.

Als Letztes muss noch erwähnt werden, dass bei einem Term nicht zwingend eine Variable vorkommen muss, da gewissermaßen eine Variable immer bereits mit einem Wert besetzt sein kann und dann nur noch der reine Wert als Term dasteht (Beispiel: Ist bei 3x „x" bekannt und der Wert x = 1 so ist 3x immer auch gleich 3, weswegen 3 auch immer schon ein Term ist. Daraus ergibt sich, dass jede Zahl immer auch schon ein Term ist, da ja theoretisch bei jeder Zahl immer eine Variable dabeistehen kann, die beispielsweise den Wert 1 hat).

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich folgende **Definition eines Terms:**

Ein Term ist in der Mathematik ein „Gebilde", das normalerweise aus Variablen, Rechenzeichen und Zahlen besteht und bei dem teilweise auch noch Klammern vorkommen können sowie vielerlei andere mathematische Ausdrücke.

Ein Term beinhaltet immer einen Rechenweg. Indem man eine Zahl in die Variablen des Terms einsetzt, erhält man erneut einen Term. Die Zahl, die sich als das Endergebnis des Rechenweges schließlich ergibt, wird als der Wert des Terms bezeichnet.

Bei der Berechnung eines Terms gibt es einzuhaltende Vorrangregeln.

1. Gibt es keine bestimmte Regel für den Term, so rechnet man immer von links nach rechts.

2. Tritt eine Klammer auf, so muss das Innere der Klammer als Erstes berechnet werden.

3. Ist keine Klammer vorhanden, gilt Punktrechnung vor Strichrechnung sowie Potenzrechnung vor Punktrechung und Strichrechnung.

Die Strichrechnung umfasst die Addition und die Subtraktion, die Punktrechnung die Multiplikation und Division.

Beispiele für Terme:

1) a; b; c; x; y (ein Term, der nur aus einer Variablen besteht)

2) 2; 4; 19; 55; 75; 450 (ein Term, der nur aus einer Zahl besteht)

3) 4a + 4b; 7a – 12 c; 9d · 14e; 7a : 9b beziehungsweise $\frac{7a}{9b}$ (ein Term, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen besteht)

4) 7,3c + 4,3 b; $\frac{3d}{4e}$; (4a + 3); –12 – 9b; (7 + 3 a)²; |5x|; $\sqrt{5x}$ (verschienenartige andere Terme)

1.1 Typ eines Terms in Abhängigkeit zur Rechenoperation

Die Rechenoperation, die bei einem Term immer zuletzt durchgeführt werden muss, bestimmt den Typ des Terms (wenn man in die Variable eine Zahl einsetzt und den Term-Wert berechnet).

a) 6 · (5x + 4)

Hier stellt der Term ein Produkt dar, da man als letzte Rechenoperation ein Multiplizieren durchführen muss.

b) 6 · 5x + 4

Hier verkörpert der Term eine Summe, da die letzte Rechenoperation ein Addieren ist.

c) 25 : (x – 4)

Hier ist der Term ein Quotient. Als Letztes wendet man als Rechenoperation nämlich hier ein Dividieren an.

d) 25 : x – 2

Dieser Term ist eine Differenz. Die letzte Rechenoperation ist nämlich hier ein Subtrahieren.

e) (7 · x + 7)²

Bei diesem Term handelt es sich um eine Potenz. Die letzte Rechenoperation stellt hier ein Potenzieren dar.

f) (7 · x + 7) : 5

Hier liegt wiederum ein Quotient vor, da die letzte Rechenoperation ein Dividieren ist.

1.2 Eine algebraische Summe

Der Typ des Terms a + b – c ist strenggenommen eine Differenz, da nach der Vorrangregel von links nach rechts gerechnet werden muss und die letzte Rechenoperation ein Subtrahieren ist. Man kann diesen Term aber auch in eine Summe umwandeln:

a + b – c = a + b + (–c)

Einen Term wie a + b – c wird in der Mathematik daher auch als eine algebraische Summe bezeichnet.

Jeder Typ eines Terms, der entweder eine Summe oder eine Differenz ist, ist immer auch eine algebraische Summe.

Beispiele für algebraische Summen:

a) 7x – 8y + 9

b) 8 · a + 9 · b² – 3 · c

c) 5 · y – 6 · z – 9 · x²

d) 9 · a + 7 · x – 6 · y – 7 · b

e) x – y

f) a + b

2. Term-Bildung bei Textaufgaben/Sachaufgaben

Häufig kommt es im Fach Mathe auch vor, dass ein Term erst aufgestellt werden muss. Ist dies der Fall, so muss man alle in der Aufgabe angegebenen relevanten Worte korrekt in die Sprache der Mathematik „umwandeln“ oder die bei einer Aufgabe angegebene Darstellung.

Beispiele für Terme, die anhand einer Textaufgabe/Sachaufgabe aufgestellt werden müssen:

a) Zum Siebenfachen einer unbekannten Zahl soll 9 addiert werden. Der gesuchte Term ist hier: 7x + 9 (die relevanten Worte sind hier „Siebenfachen“, „unbekannte Zahl“, „9“, „addiert“; hierbei muss man zudem wissen, dass das Wort „fach“ in der Sprache der Mathematik ein „Mal“ bedeutet, und „unbekannte Zahl“ ein anderer Ausdruck für die Variable ist, natürlich muss man außerdem innerhalb des Satzes erkennen, auf welche Weise alle relevanten Wörter sich aufeinander beziehen).

b) Das Dreifache von x wird von 37 subtrahiert. Der gesuchte Term ist hier: 37 – 3x (die relevanten Worte sind hier: „Dreifache“, „x“, „37“, „subtrahiert“).

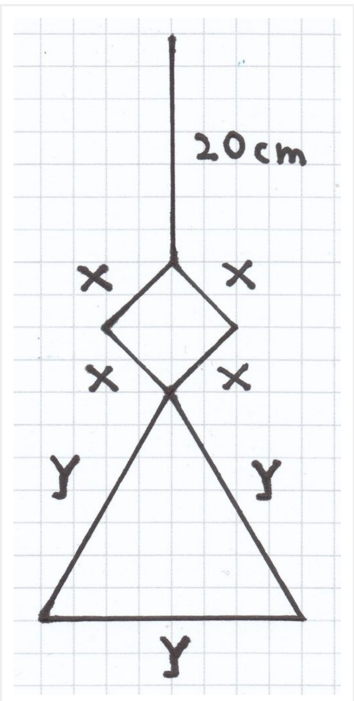
c) Multipliziere eine Zahl mit der um 3 größeren Zahl. Der gesuchte Term ist hier: x · (x + 3) (die relevanten Worte sind hier: „Multipliziere“, „Zahl“, „3 größeren Zahl“, hierbei muss man zudem wissen, dass „Zahl“ hier ein anderer Ausdruck für die Variable ist und dass „x + 3“ eine Einheit bildet und daher in Klammern stehen muss).

d) Dividiere das Sechsfache einer Zahl durch 19. Der Term ist hier: 19 : 6x (die relevanten Worte sind hier: „Dividiere“, „Sechsfache“, „Zahl“, „19“).

2.1 Termaufstellung anhand von geometrischen Figuren

Auf dem unteren Bild befinden sich verschiedene geometrische Flächen, zu denen jeweils ein bestimmter Term aufgestellt werden soll.

2.11 Terme bei Darstellungen



— Kette aus Draht

Das Bild soll einen Weihnachtsschmuck aus Draht darstellen. Wie lautet der Term für den Weihnachtsschmuck?

Der Term lautet:

y + y + y + x + x + x + x + 20;

3y + 4x +20.

Wie lang ist die Drahtlänge?

a) x = 5 und y = 6;

b) x = 4,8 und y = 5,4 cm (die Maße sind in cm).

a) x = 5 und y = 6: 3 · 6 + 4 · 5 + 20 = 58

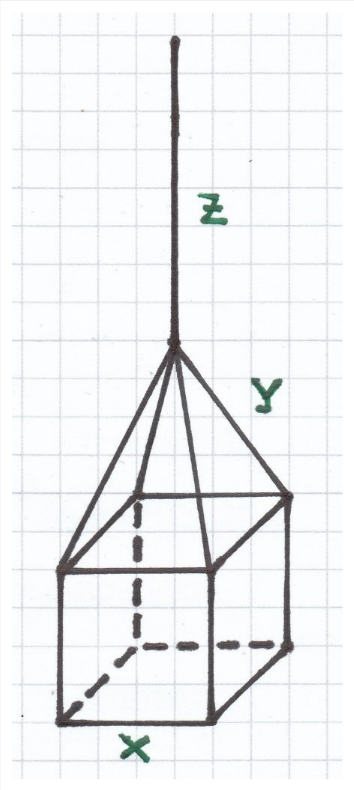
Der Weihnachtsschmuck ist 58 cm lang.

b) x = 4,8 cm, y = 5,4 cm: 3 · 5,4 + 4 · 4,8 + 20 = 55,4

Der Weihnachtsschmuck ist 55,4 cm lang.

Das Bild soll eine Draht-Konstruktion darstellen. Der untere Teil stellt einen Würfel dar. Darauf befinden sich gleichlange Befestigungen. Zum Schluss ist ein gerades Stück Draht angebracht. Wie lautet der Term für die Draht-Konstruktion?

Wie lang ist die Drahtlänge?



— Konstruktion aus Draht

a) x = 5,4 cm; y = 8,6 cm; z = 12,4 cm;

b) x = 7,2 cm; y = 10,6 cm und z = 20,5 cm.

Der Term zu Berechnung der Drahtlänge ist:

x + x + x + x + x + x + x + x + x + x + x + x + y + y + y + y + z;

12x + 4y + z

a) Bei x = 5,4 cm; y = 8,6 cm; z = 12,4 cm ist die Drahtlänge:

12 · 5,4 cm + 4 · 8,6 cm + 12,4 cm = 111,6 cm

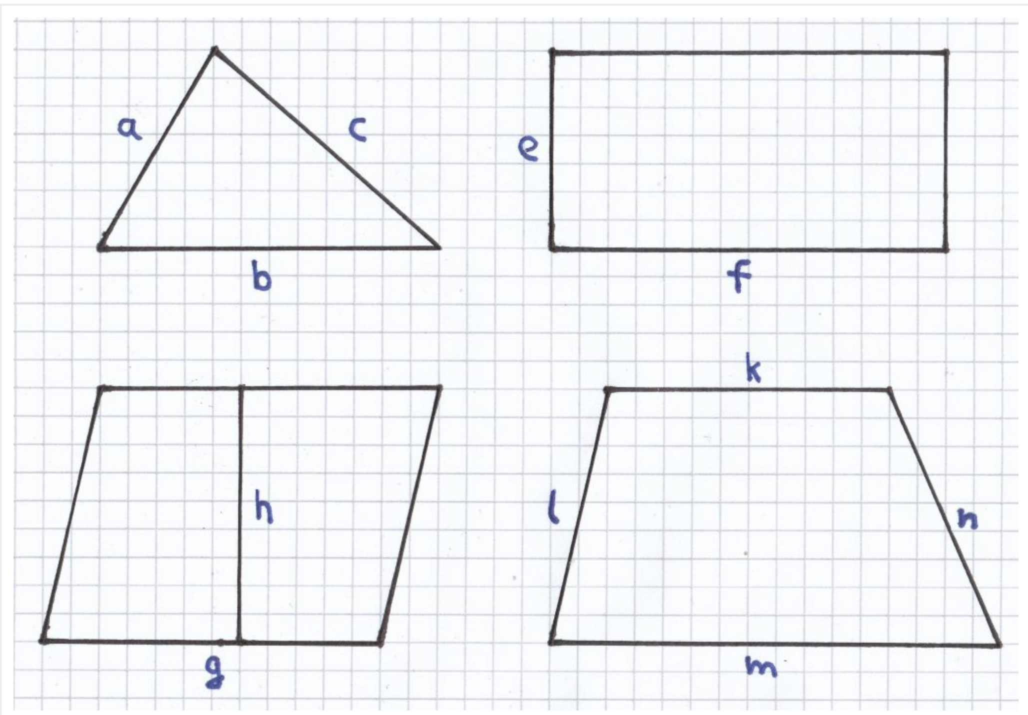
Die Drahtkonstruktion ist 111,6 cm lang.

b) Bei x = 7,2 cm; y = 10,6 cm und z = 20,5 cm ist die Drahtlänge:

12 · 7,2 cm + 4 · 10,6 cm + 20,5 cm = 149,3 cm

Die Drahtkonstruktion ist 149,3 cm lang.

2.12 Terme bei Vielecken



— Verschiedene geometrische Flächen

a) Gib einen Term für das Dreieck an, der den Umfang des Dreiecks wiedergibt. Der gesuchte Term lautet hier: a + b + c (zur Ermittlung des Umfangs bei einem Dreieck müssen alle Seiten des Dreiecks addiert werden).

b) Gib einen Term an, der die Fläche des Rechtecks wiedergibt: Der gesuchte Term ist hier: e · f (die Fläche eines Rechtecks ist immer das Produkt seiner beiden unterschiedlichen Seiten).

c) Gib einen Term an, der die Fläche des Parallelogramms wiedergibt. Der gesuchte Term lauter hier: g · h (der Fläche eine Parallelogramms ist immer das Produkt aus einer Grundseite zu einer hierzu im rechten Winkel stehenden Höhe).

d) Gib einen Term an, der den Umfang des Trapezes wiedergibt. Der gesuchte Term ist hier: k + l + m + n (zur Bestimmung des Umfangs bei einem Viereck müssen alle Seiten des Vierecks addiert werden).

3. Wert-Berechnung bei einem Term

Ist bei einem Term für jede vorkommende Variable eine Zahl gegeben, so kann man jeweils den Wert des Terms berechnen.

Beispiele:

a) Folgender Term ist gegeben: x + 7.

Darüber hinaus sind die Zahlen x = 0; x = 1; x = 12; x = 44; x = –5; x = 1,7; x = –5,3; $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{4}{7}$ gegeben.

Daraus ergeben sich diese Werte für den Term:

für x = 0: 0 + 7; 7;

für x = 1: 1 + 7; 8;

für x = 12: 12 + 7; 19;

für x = 44: 44 + 7; 51;

für x = – 5: –5 + 7; 2;

für x = 1,7: 1,7 + 7; 8,7;

für x = –5,3: –5,3 + 7; 1,7;

für $x = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} + 7$; $7\frac{1}{2}$;

für $x = -\frac{4}{7}$: $-\frac{4}{7} + \frac{49}{7}$; $\frac{45}{7}$; $6\frac{3}{7}$

b) Folgender Term ist gegeben: (x – 7) · (x + 7).

Darüber hinaus sind die Zahlen x = 0; x = 1; x = 12; x = 44; x = –5; x = 1,7; x = –5,3; $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{4}{7}$ gegeben.

Hieraus ergeben sich diese Werte für den Term:

für x = 0: (0 – 7) · (0 + 7); –7 · 7; –49;

für x = 1: (1 – 7) · (1 + 7); –6 · 8; –48;

für x = 12: (12 – 7) · (12 + 7); 5 · 19; 95;

für x = 44: (44 – 7) · (44 + 7); 37 · 51; 1887;

für x = –5: (–5 – 7) · (5 + 7); –12 · 12; –144;

für x = 1,7: (1,7 – 7) · (1,7 + 7); –5,3 · 8,7; –46,11;

für x = –5,3: (–5,3 – 7) · (–5,3 + 7); –12,3 · 1,7; –20,91;

für $x = \frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2} - 7) \cdot (\frac{1}{2} + 7)$; $(\frac{1}{2} - \frac{28}{2}) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{28}{2})$; $-\frac{27}{2} \cdot \frac{29}{2}$; $-\frac{783}{4}$; $-195\frac{3}{4}$;

für $x = -\frac{4}{7}$: $(-\frac{4}{7} - 7) \cdot (-\frac{4}{7} + 7)$; $(-\frac{4}{7} - \frac{49}{7}) \cdot (-\frac{4}{7} + \frac{49}{7})$; $(-\frac{56}{7}) \cdot (\frac{45}{7})$; $-\frac{2520}{49}$; $-51\frac{21}{49}$

Klassiker: Mahnah Mahnah Song | Sesamstraße

3.1 Wertgleichheit bei Termen

Zwei Terme können in Mathe auch wertgleich sein. Liefern zwei unterschiedlich aussehende Terme beim Einsetzen jedweder Zahlen das gleiche Ergebnis/die gleichen Werte, so liegt zwischen beiden Termen eine Wertgleichheit vor. Diese Wertgleichheit lässt sich dann immer auch algebraisch beweisen, indem ein Term so weit umgeformt wird, bis er die identische Form des anderen hat. Wertgleiche Terme können daher auch immer mittels eines Gleichheitszeichens miteinander verbunden werden.

Mittels einer sogenannten Termunformung kann ein Term verändert werden. Ein derart umgeformter Term stellt in der Regel eine Vereinfachung zum ursprünglichen Term dar. Der ursprüngliche Term und der umgeformte Term sind wertgleich.

Beispiele für Wertgleichheit zweier Terme

Es sind die Terme „$3x$“ und „$5x + 2x – 4x$“ gegeben. Für $x = 0$; für $x = 1$; für $x = 2$; für $x = –1$ sollen die Werte der beiden Terme ermittelt werden.

für $x = 0$: $3 \cdot 0$; 0;

$5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 – 4 \cdot 0$; 0

für $x = 1$: $3 \cdot 1$; 3;

$5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 – 4 \cdot 1$; $5 + 2 – 4$; 3

für $x = 2$: $3 \cdot 2$; 6;

$5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 – 4 \cdot 2$; $10 + 4 – 8$; 6

für $x = –1$: $3 \cdot (–1)$; $–3$;

$5 \cdot (–1) + 2 \cdot (–1) – 4 \cdot (–1)$; $–5 – 2 + 4$; $–3$

Beide Terme sind wertgleich. Es gilt daher: $3x = 5x + 2x – 4x$.

Durch eine Termumformung kann der Term vereinfacht werden. Denn „$3x$“ stellt eine Vereinfachung von „$5x + 2x – 4x$“ dar.

Es sind die Terme „$x^2 + 6x + 9$“ und „$(x + 3)^2$“ gegeben. Für $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = –1$ sollen die Werte der beiden Terme berechnet werden.

für $x = 0$: $(0)^2 + 6 \cdot 0 + 9$; $0 + 0 + 9$; 9;

$(0 + 3)^2$; $(3)^2$; 9

für $x = 1$: $(1)^2 + 6 \cdot 1 + 9$; $1 + 6 + 9$; 16;

$(1 + 3)^2$; $(4)^2$; 16

für $x = 2$: $(2)^2 + 6 \cdot 2 + 9$; $4 + 12 + 9$; 25;

$(2 + 3)^2$; $(5)^2$; 25

für $x = –1$: $(–1)^2 + 6 \cdot (–1) + 9$; $1 – 6 + 9$; 4;

$(–1 + 3)^2$; $(2)^2$; 4

Der Term „$x^2 + 6x + 9$“ stellt die 1. Binomische Formel in der aufgelösten Form dar. Der Term „$(x + 3)^2$“ ist die 1. Binomische Formel in der unaufgelösten Form.

Beispiel für Nichtwertgleichheit zweier Terme

Es sind die Terme „4x + 4“ und „4 · (x + 4)“ gegeben. Für x = 0;   x = 1;   x = 2;   x = –1 sollen die Werte der beiden Terme berechnet werden.

für x = 0:   4 · 0 + 4;   0 + 4;   4;

4 · (0 + 4);   4 · 4;   16

für x = 1:   4 · 1 + 4;   4 + 4;   8;

4 · (1 + 4);   4 · 5;   20

für x = 2:   4 · 2 + 4;   8 + 4;   12;

4 · (2 + 4);   4 · 6;   24

für x = –1:   4 · (–1) + 4;   –4 + 4;   0;

4 · (–1 + 4);   4 · 3;   12

Unterscheiden sich die Term-Werte bereits bei der Einsetzung einer Zahl, so liegt keine Wertgleichheit vor. Daher sind die beiden Terme „4x + 4“ und „4 · (x + 4)“ nicht wertgleich.

3.2 Weglassen von Malpunkten

Bei einem Term, der eindeutige Rechenzeichen vorweist und bei dem somit keine Missverständnisse hinsichtlich des Termaufbaus aufkommen, können die Malpunkte weggelassen werden.

Es gilt daher: 1 · x = x.

Beispiele:

5x = 5 · x

xy = x · y

4(x + y) = 4 · (x + y)

Aber es gilt nicht: 27 anstatt 2 · 7. Auch nicht $5\frac{1}{4}$ anstatt $5 \cdot \frac{1}{4}$.

4. Zusammenfassen von gleichartigen Einzeltermen bei einem Term

Handelt es sich bei einem Term um eine algebraische Summe, das heißt, dass der Term gewissermaßen nur aus Plus- und Minuszeichen besteht, so können hierbei gleichartige Variable zusammengefasst werden, ebenso nur vorkommende Zahlen.

Mathematik-Nachhilfe-Hinweis: Eine algebraische Summe ist beispielsweise x – 3, da man immer auch schreiben kann: x + (–3).

Eine Variable ist dann immer gleichartig zu anderen Variablen, wenn Folgendes gewährleistet ist

- Die Variable muss den gleichen Buchstaben vorweisen und

- Die Variable muss die gleiche Potenz vorweisen.

Verschiedene auftretende „reine“ Zahlen können immer ohne Einschränkung bei einem Term zusammengefasst werden.

Die Terme 7b und 3b weisen einzig einen Unterschied im **Koeffizienten** (Zahlfaktor) auf. Das Gleiche gilt für $5x^2$ und $6x^2$ sowie $12s^2t$ und $5s^2t$. Diese Einzelterme sind daher **gleichartig**.

Hingegen nicht gleichartig sind folgende Einzelterme: 4ab und $3a^2b$, ebenso nicht 4x und 5y oder $5x^2y$ und $7xy^2$.

Gleichartig ist etwas vollkommen anderes als wertgleich! Die Terme 2ab und 5ab sind gleichartig, da einzig ihre Koeffizienten unterschiedlich sind. Diese Terme sind aber nicht wertgleich. Denn bei a = 3 und b = 2 ergibt sich für 2ab: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ und für 5ab ergibt sich: $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Gleichartige Einzelterme addiert oder subtrahiert man auf die Art, dass man deren Koeffizienten addiert oder subtrahiert.

a) $8b + 3b = 11b$

b) $9a – a = 8a$

c) $–7xy + 2xy = –5xy$

d) $0{,}5x^2y + \frac{1}{4}x^2y = 0{,}75x^2y$

Beispiele:

a) $5x + 12 + 19x + 4 + 11 – 3x – 7 + 36x – 29 + 45 – 7x$;

Zur besseren Übersicht sollte man gleichartige Einzelterme zuerst ordnen, da hier das Kommutativgesetz/Vertauschungsgesetz gilt. Dann sieht der Term folgendermaßen aus:

$5x + 19x – 3x + 36x – 7x + 12 + 4 + 11 – 7 – 29 + 45$;

Jetzt kann man die gleichen Einzelterme zusammenfassen. Daraus ergibt sich folgender End-Term:

$50x + 36$;

b) $y^3 + 4y + 29 – 3y + 5y^3 – 12 – 5y^2 + 9 + 14y – 2y^2 + 12y^3 + 3y^2$;

Eine sinnvolle Ordnung bei Einzeltermen mit Variablen, die eine unterschiedliche Potenz vorweisen, ist eine „hierarchische“. Konkret heißt das, dass die gleichartigen Einzelterme mit der höchsten Potenz über der Variablen am Anfang stehen. Danach kommen die gleichartigen Einzelterme, deren Variable die nächst kleinere Potenz vorweisen und so weiter. Ganz am Schluss kommt schließlich die „reine“ Zahl, über der gewissermaßen die Potenz eins steht. Beherzigt man diese „hierarchische“ Schreibweise von Termen, dann tut man sich generell bei späteren Mathe-Stoffgebieten leichter, in denen Terme auf verschiedenartige Weise wieder vorkommen – beziehungsweise verliert bei diesen nicht so leicht den Überblick.

Der Term sieht dann folgendermaßen aus:

$y^3 + 5y^3 + 12y^3 – 5y^2 – 2y^2 + 3y^2 + 4y – 3y + 14y + 29 – 12 + 9$;

$18y^3 – 4y^2 + 15y + 26$.

5. Das Auflösen von Klammern bei einem Term

5.1 Plus- und Minusklammer

Tritt bei einem Term eine Klammer auf, so ist immer das Vorzeichen vor der Klammer entscheidend. Bei einem Plus vor der Klammer darf man hierbei sofort die Klammer entfernen und an dem Term ändert sich nichts weiter. Bei einem Minus vor der Klammer sieht das anders aus. Dann liegt nämlich eine sogenannte Minusklammer vor. Und hier gilt: Um die Minusklammer zu entfernen, muss man jedes Rechenzeichen (ein Plus oder ein Minus) in der Klammer umdrehen (aus einem Plus wird ein Minus und aus einem Minus wird ein Plus).

In allgemeiner Form sieht ein Auflösen einer Plusklammer folgendermaßen aus:

$a + (b + c) = a + b + c$

In einer allgemeinen Form sieht ein Auflösen einer Minusklammer wie folgt aus:

$a – (b + c) = a – b – c.$

Beispiele: das Auflösen einer Plusklammer

1. $(7x + 3) = 7x + 3$
2. $(–5 + 9x) = –5 + 9x$; geordnet: $9x – 5$
3. $3x + 12 + 5y + (7x +19 – 3y) =$

   $3x + 12 + 5y + 7x + 19 – 3y;$

   $3x + 7x + 5y – 3y + 12 + 19;$

   $10x + 2y + 31.$

Beispiele: das Auflösen einer Minusklammer

1. $–(9x + 3) = –9x – 3$
2. $–(– 7 + 3y) = 7 – 3y$; geordnet: $–3y + 7$
3. $–3 – 14x + 3y – (5 + 7y – 12x) =$

   $–3 – 14x + 3y – 5 – 7y + 12x;$

   $–14x + 12x + 3y – 7y – 3 – 5;$

   $–2x – 4y – 8.$

Mathe-Nachhilfe-Hinweis: Ist direkt nach einer Minusklammer eine Zahl ohne Vorzeichen, dann ist die Zahl immer Positiv, also $–(5)$; $–(+5)$; $–5$.

5.2 Klammern bei einem Produkt

Bildet ein Faktor vor einer Klammer mit einer algebraischen Summe in einer Klammer ein Produkt, so löst man die Klammer auf, indem man jeden Summanden mit dem Faktor „malnimmt“. Diesen Vorgang nennt man auch Ausmultiplizieren und das hierbei zum Tragen kommende mathematische Gesetz das Distributivgesetz/Verteilungsgesetz.

In einer allgemeinen Form sieht das Ausmultiplizieren folgendermaßen aus:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Beispiele für ein Ausmulitplizieren mit Faktor vor der Klammer einer algebraischen Summe:

1. $7 \cdot (9 + 12x) = 7 \cdot 9 + 7 \cdot 12x$; $63 + 84x$; geordnet: $84x + 63$;
2. $5a \cdot (11b – 3c) = 5a \cdot 11b + 5a \cdot (–3c)$; $55ab – 15ac$.

Treffen beim Ausmultiplizieren zwei gleiche Variablen aufeinander, so addieren sich deren Potenzen.

Beispiele für das Addieren von Potenzen beim Ausmultiplizieren:

1. $5a \cdot (9a – 5) = 5a \cdot 9a + 5a \cdot (–5)$; $45a^{1+1} – 25a$; $45a^2 – 25a$;

2. $12b^2 \cdot (-3b^3 + 2) = 12b^2 \cdot (-3b^3) + 12b^2 \cdot 2$; $-36b^{2+3} + 24b^2$; $-36b^5 + 24b^2$.

Setzt sich ein Produkt aus mehreren Klammern zusammen, so muss man alle Einzelterme der einen Klammer mit allen Einzeltermen der anderen Klammer „malnehmen".

In einer allgemeinen Form sieht hier das Ausmultiplizieren und somit das Auflösen der Klammern folgendermaßen aus:

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$; $ac + ad + bc + bd$.

Mathematik-Nachhilfe-Hinweis: Mit welchem Einzelterm man beim Ausmultiplizieren anfängt, ist egal, da beim hier angewandten Distributivgesetz/Verteilungsgesetz auch gleichzeitig noch das Kommutativgesetz/Vertauschungsgesetz gilt. Trotzdem ist es ratsam, immer ein gleiches Ausmultiplizieren-Schema anzuwenden. Dadurch ist gewährleistet, dass man zum einen schneller zum Ergebnis gelangt und dass man zum anderen auch nicht eine mögliche „Produktkombination" vergisst/übersieht. Am besten man verinnerlicht das obige Ausmultiplizieren-Schema, da man es sich denkbar einfach merken kann. Schließlich werden hier Schritt für Schritt von „links nach rechts" alle möglichen „Produktkombinationen" erzeugt.

Beispiele für das Auflösen von zwei Klammern bei einem Produkt

1. $(3a + 5b) \cdot (7c - 12d) = 3a \cdot 7c + 3a \cdot (-12d) + 5b \cdot 7c + 5b \cdot (-12d)$;

   $21ac - 36ad + 35bc - 60bd$;

2. $(7x + 14y) \cdot (5x^2 + 19y^3) = 7x \cdot 5x^2 + 7x \cdot 19y^3 + 14y \cdot 5x^2 + 14y \cdot 19y^3$;

   $35x^3 + 133xy^3 + 70yx^2 + 266y^4$;

   $35x^3 + 133xy^3 + 70x^2y + 266y^4$ (geordnet).

6. Das Ausklammern/Faktorisieren bei einer algebraischen Summe

Die Umkehrung des Ausmultiplizierens ist das Ausklammern/Faktorisieren. Das Ausklammern/Faktorisieren kann immer dann bei einer algebraischen Summe angewandt werden, wenn bei allen vorkommenden Einzeltermen ein gemeinsamer Faktor gefunden werden kann. Diese Faktor kann dann nämlich jeweils ausgeklammert werden.

Der gemeinsame Faktor kann eine Zahl, eine Variable oder eine Zahl und eine Variable sein. Der ermittelte Faktor wird dann immer vor eine Klammer gesetzt und die anderen Einzelterme mit dem jeweiligen Vorzeichen in die Klammer.

In einer allgemeinen Form sieht das Ausklammer/Faktorisieren folgendermaßen aus:

$ax + ay - az = a \cdot (x + y - z)$.

Beispiele für ein Ausklammern/Faktorisieren

1. $5x + 9x^2 + 2xy = x \cdot (5 + 9x + 2y)$

2. $12a^2 - 24ab + 36ab^3 = 12a \cdot (a - 2b + 3b^3)$

Mathe-Nachhilfe-Hinweis: Hat man den gemeinsamen Faktor bei einer algebraischen Summe gefunden, so teilt man diesen „gedanklich" duch alle Einzelterme. Das, was dann beim „Divisionsergebnis" übrig bleibt, wird dann immer in die Klammer geschrieben.

6.1 Das Ausklammern/Faktorisieren bei den binomischen Formeln

Als algebraische Summe kann auch eine aufgelöste binomische Formel vorliegen. Diese kann natürlich auch wieder in die unaufgelöste Form gebracht werden, jene algebraische Umformung wird auch als Ausklammern/Faktorisieren bezeichnet.

Mathematik-Nachhilfe-Hinweis: Zur näheren Erläuterung der binomischen Formeln in der unaufgelösten und aufgelösten Form siehe hierzu auch unter dem Reiter Binomische Formeln die dort gemachten Ausführungen an.

6.11 Ausklammern/Faktorisieren der 1. Binomische Formel

Um die 1. Binomische Formel ausklammern/faktorisieren zu können, muss man sich diese binomische Formel in der aufgelösten und in der unaufgelösten Form auswendig ins Gedächtnis rufen können.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b) \cdot (a + b)$; $(a + b)^2$ (1. Binomische Formel)

Daraufhin kann man mit einem geschulten Auge bei bestimmten algebraischen Summen erkennen, dass es sich hier um die 1. Binomische Formel handelt.

Beispiele:

$16x^2 + 80xy + 100y^2$

Hier muss man erkennen, dass der erste Term das „a^2" der 1. Binomischen Formel ist, denn $4x \cdot 4x = 16x^2$; ebenso, dass der letzte Term das „b^2" der 1. Binomischen Formel ist, denn $10y \cdot 10y = 100y^2$. Hat man das erkannt, so kann man auch den Mittelterm 80xy auf die 1. Binomische Formel hin zurückführen; denn dieser lautet ja 2ab; $2 \cdot 4x \cdot 10y = 80xy$.

Daher sieht hier das korrekte Ausklammern/Faktorisieren folgendermaßen aus:

$16x^2 + 80xy + 100y^2 = (4x + 10y) \cdot (4x + 10y)$; $(4x + 10y)^2$.

Mathematik-Nachhilfe-Hinweis: Um die 1. Binomische Formel in der unaufgelösten Form zu erkennen, muss man nur sehen, dass zwei Terme häufig Variablen mit einer Quadratzahl vorweisen sowie zwei Variablen die Potenz „hoch zwei"/"²" haben.

$49r^2 + 126rs + 81s^2 = (7r + 9s) \cdot (7r + 9s)$; $(7r + 9s)^2$.

6.12 Ausklammern/Faktorisieren der 2. Binomischen Formel

Für die 2. Binomische Formel gilt für das Ausklammern/Faktorisieren das Gleiche wie bei der 1. Binomischen Formel: Man muss nur erkennen, dass zwei Terme nomalerweise je eine Quadratzahl und die Potenz „hoch zwei"/"²" vorweisen. Ist nun der dritte Term noch eindeutig auf den Mittelterm der 2. Binomischen Formel zurückführbar, so kann man die 2. Binomische Formel sofort von der unaufgelösten in die aufgelösten Form umformen.

$a^2 – 2ab + b^2 = (a – b) \cdot (a – b)$; $(a – b)^2$ (2. Binomische Formel)

Beispiele:

$9a^2 – 48ab + 64b^2$

Hier muss man erkennen, dass der erste Term das „a^2" der 2. Binomischen Formel ist, denn $3a \cdot 3a = 9a^2$, ebenso, dass der letzte Term das „b^2" der 2. Binomischen Formel ist, denn $8b \cdot 8b = 64b^2$. Hat man diese Erkenntnisleistung vollbracht, so kann man auch den Mittelterm „–48ab" auf die 2. Binomische Formel hin zurückführen.

Deshalb ist hier das korrekte Ausklammern/Faktorisieren:

$9a^2 – 48ab + 64b^2 = (3a – 8b) \cdot (3a – 8b)$; $(3a – 8b)^2$.

Mathe-Nachhilfe-Hinweis: Um zu erkennen, dass die 2. Binomische Formel in der unaufgelösten Form vorliegt, muss man nur sehen, dass häufig zwei Variablen eine Quadratzahl vorweisen und darüber hinaus die Variablen die Potenz „hoch zwei"/"²" haben.

$4r^2 – 28rs + 49s^2 = (2r – 7s) \cdot (2r – 7s)$; $(2r – 7s)^2$.

6.13 Ausklarmmern/Faktorisieren der 3. Binomischen Formel

Das Ausklammmern/Faktorisieren der 3. Binomischen Formel geht um einiges leichter, als dies bei der 1. und der 2. Binomischen Formel der Fall ist. Der Grund hierfür ist, dass die 3. Binomische Formel in der aufgelösten Form nur aus zwei Termen besteht (da sie keinen Mittelterm vorweist). Natürlich muss man aber auch hier wissen, wie die 3. Binomische Formel in der aufgelösten und unaufgelösten Form aussieht.

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ (3. Binomische Formel)

Beispiele:

$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$.

Mathematik-Nachhilfe-Hinweis: Als entscheidendes Erkennungsmerkmal müssen beide Terme mit einem Minuszeichen als Rechenzeichen miteinander verbunden sein. Darüber hinaus weisen die Terme oftmals Variablen mit der Potenz "hoch zwei"/"²" auf bzw. bestehen aus Quadratzahlen.

$64r^2 - 25s^2 = (8r + 5s) \cdot (8r - 5s)$.

Diese Seite des Mathematik Nachhilfe Blogs zu Termen kann man hier als PDF downloaden: Mathe-Nachhilfe: Terme.

---

4 GEDANKEN ZU "TERME"

Pingback: Mathematik-Nachhilfe: Binomische Formeln, Teil 2 | Mathematik Nachhilfe Blog

Pingback: Mathe-Nachhilfe: Bruchterme, Teil 9 | Mathematik Nachhilfe Blog

Pingback: Mathematik-Nachhilfe: Aufgaben zum Stoffgebiet Term, Teil 12 | Mathematik Nachhilfe Blog

Pingback: Mathe-Nachhilfe: Term, Teil 13 | Mathematik Nachhilfe Blog